УДК 004.02

И. В. Бойков, О. А. Баулина

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ ХОПФИЛДА

Аннотация.

Актуальность и цели. Решение задач математической физики на искусственных нейронный сетях является активно развивающимся направлением, объединяющим методы вычислительной математики и информатики. Применение нейронных сетей особенно эффективно при решении обратных и некорректных задач и уравнений с неточно заданными параметрами. В настоящее время основным методом решения задач математической физики на искусственных нейронных сетях является минимизация функционала погрешности. Целью данной работы является построение устойчивого и быстродействующего метода решения уравнений математической физики на искусственных нейронный сетях, основанного на теории устойчивости решений дифференциальных уравнений.

Материалы и методы. В работе предлагается приближенный метод решения эллиптических уравнений на нейронных сетях Хопфилда. Метод заключается в аппроксимации исходной краевой задачи разностной схемой и построении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой сходится к точному решению разностной схемы.

Результаты. Предложен метод решения краевых задач для линейных и нелинейных эллиптических уравнений, основанный на методах теории устойчивости. Эффективность метода проиллюстрирована модельными примерами.

Выводы. Результаты работы могут быть использованы при решении широкого класса краевых задач для линейных и нелинейных эллиптических уравнений, определенных в кусочно-гладких областях.

Ключевые слова: нейронная сеть Хопфилда, краевые задачи для эллиптических уравнений, устойчивые методы решения.

I. V. Boykov, O. A. Baulina

APPROXIMATE SOLUTION OF ELLIPTIC EQUATIONS ON HOPFIELD NEURAL NETWORKS

Abstract.

Background. Solution of mathematical physics' problems on artificial neural networks is an actively developing concept combining methods of calculus mathematics and computer science. Application of neural networks is especially effective in solution of reverse and incorrect problems and equations with inaccurately set parameters. At the present time the main method of solution of mathematical physics' problems on artificial neural networks is minimization of functional error. The study is aimed at development of a stable and quick method of solving mathematical physics' problems on artificial neural networks, based on the theory of differential equation solution stability.

Materials and methods. The article describes an approximate method of elliptic equations' solution on Hopfield neural networks. The method consists in approximation of the source boundary problem of difference scheme and formation of a system of regular differential equations, the solution of which is reduced to solution of the difference scheme.

Results. The authors suggest a method of boundary problem solution for linear and non-linear elliptic equations, based on the methods of the stability theory. Effectivenes of the method is demonstrated by the model examples.

Conclusions. The results of the study may be used for solution of a wide class of boundary problems for linear and non-linear elliptic equations, determined in sectionally smooth areas.

Key words: Hopfield neural network, boundary problems for elliptic equations, stable solution methods.

Применение нейронных сетей Хопфилда [1, 2] для решения задач математической физики основано на возможности представления нейрона в виде электронной схемы, описываемой нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением. Согласно этому представлению i-й нейрон, соединенный с N нейронами сети (включая самого себя), описывается системой уравнений

$$C_i \frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} f(u_j) + I_i, \; i = 1, 2, \ldots, N,$$

где w_{ij} – синаптические веса нейронов сети; I_i – ток, представляющий внешнее смещение; u_i – индуцированное локальное поле на входе функции активации $f(u_i)$; $f(u_i)$ – нелинейные функции активации; R_i и C_i – сопротивление утечки и емкость утечки соответственно.

Опишем архитектуру нейронной сети Хопфилда, используемой в данной работе. Предлагаемая сеть, состоящая из n нейронов, показана на рис. 1.

В нейронную сеть входят нелинейные устройства, реализующие нелинейные функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Выходные сигналы $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, суммируются в блоке сумматора с синаптическими коэффициентами w_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и после прохождения RC цепочки подаются на вход устройства активации, реализующего функцию $x = \varphi(u)$.

В данной архитектуре используется функция $\varphi(u) = au$. Таким образом, представленная на рис. 1 нейронная сеть Хопфилда реализует систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{C_i}{a} \frac{dx_i(t)}{dt} + \frac{x_i(t)}{aR_i} = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} f_{ij}(x_1, \ldots, x_n) + I_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отметим, что в качестве сопротивлений R_i могут браться достаточно большие значения, а также I_i могут полагаться равными нулю. В результате нейронные сети Хопфилда могут моделировать системы уравнений вида

$$\frac{C_i}{a} \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} f_{ij}(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

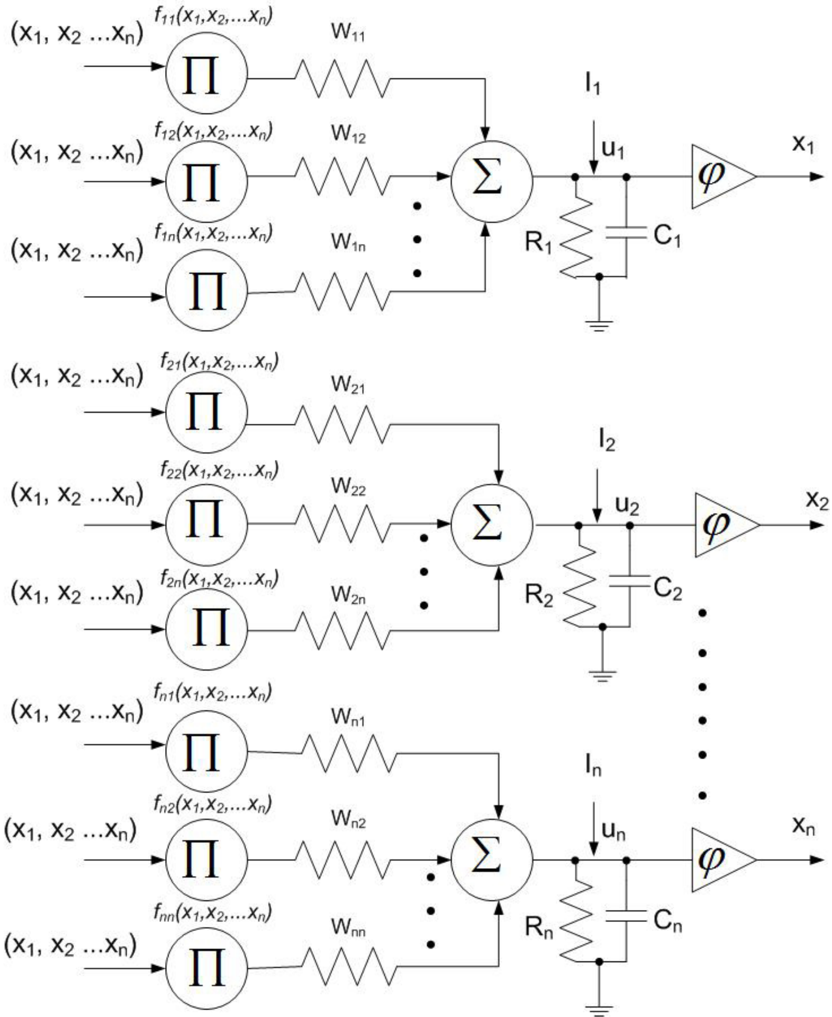

Рис. 1. Архитектура нейронной сети

В известных авторам работах численные методы решения задач математической физики на искусственных нейронных сетях (ИНС) основаны на методах минимизации функционалов (подробная библиография работ по численным методам решения задач математической физики на ИНС содержится в [3]). В данной работе, являющейся продолжением работы [4, 5], в основу построения алгоритмов положены методы теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ниже используются следующие обозначения:

$$R(a,r)=\{z\in B:\|z-a\|\le r\},\ \ S(a,r)=\{z\in B:\|z-a\|=r\},$$

$$\Lambda(K)=\lim_{h\downarrow 0}\left(\|I+hK\|-1\right)h^{-1}.$$

Здесь B – банахово пространство; $a\in B$; K – линейный оператор, действующий из B в B; $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма [6] оператора K; через I обозначен тождественный оператор.

1. Непрерывные методы решения операторных уравнений

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$A(x) = 0, \tag{1}$$

действующее из банахова пространства B в B.

Рассмотрим в банаховом пространстве B задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)); \tag{2}$$

$$x(0) = x_0. \tag{3}$$

Пусть оператор A имеет непрерывную производную Гато; $A(0) = 0$.

Теорема 1 [7, 8]. Пусть на любой дифференцируемой кривой $\varphi(t)$, расположенной в шаре $B(0,r)$ достаточно малого радиуса r, интеграл

$$\int_0^t \Lambda\left(A'(\varphi(\tau)\right) d\tau$$

не положителен (отрицателен и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \Lambda\left(A'(\varphi(\tau)\right) d\tau = -\alpha, \ \ \alpha > 0.)$$

Тогда тривиальное решение уравнения (2) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Замечание. Теорема справедлива и при $r = \infty$.

Из теоремы 1 следует, что если для любой непрерывно дифференцируемой функции $g(t)$, определенной в банаховом пространстве B, выполняется неравенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))d\tau \le -\alpha, \ \ \alpha > 0, \tag{4}$$

то задача Коши (2)–(3) сходится к решению x^* уравнения (1).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 [9]. Пусть уравнение (1) имеет решение x^*. Пусть на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в банаховом пространстве B, справедливо неравенство (4). Тогда решение задачи Коши (2)–(3) сходится к решению x^* уравнения (1) при любом начальном приближении.

Замечание. Из неравенства (4) следует, что логарифмическая норма $\Lambda(A'(x))$ может обращаться в нуль или принимать положительные значения в конечном или счетном числе точек пространства B.

Теорема 3 [9]. Пусть уравнение (1) имеет решение x^*. Пусть на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $B(x^*, r)$ выполняются следующие условия:

1) при любом t $(t > 0)$ выполняется неравенство $\int\limits_0^t \Lambda(A'g(\tau))d\tau \le 0;$

2) справедливо равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda(A'(g(\tau))d\tau = -\alpha, \alpha > 0.$

Тогда решение задачи Коши (2)–(3) сходится к решению x^* уравнения (1).

Решение линейных эллиптических уравнений на нейронных сетях Хопфилда

Пусть $D = [0,1;0,1]$. В области D рассмотрим задачу Дирихле

$$a(x_1,x_2)\Delta u(x_1,x_2) + b(x_1,x_2)\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} +$$

$$+c(x_1,x_2)\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} + d(x_1,x_2)u(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) \qquad (5)$$

с граничными условиями

$$u(x_1,x_2)|_\Gamma = u_0(x_1,x_2). \qquad (6)$$

Здесь $\Gamma = \partial D.$

Замечание 1. Двумерные уравнения рассматриваются для простоты обозначений.

Замечание 2. Рассматривается простейший вид эллиптических уравнений и прямоугольная область для простоты описания. Нетрудно видеть, что полученные ниже результаты распространяются на эллиптические уравнения более общего вида и на произвольные границы Γ, удовлетворяющие условиям Ляпунова [10].

Введем сетку узлов (v_k, v_l), $k,l = 0,1,\ldots,N$, где $v_k = k/N$, $k = 0,1,\ldots,N.$

Во внутренних узлах (v_k, v_l), $k,l = 0,1,\ldots,N-1$, оператор Δu аппроксимируется пятиточечной разностной схемой

$$\frac{u(v_{k-1},v_l) + u(v_{k+1},v_l) - 2u(v_k,v_l)}{h^2} + \frac{u(v_k,v_{l+1}) + u(v_k,v_{l-1}) - 2u(v_k,v_l)}{h^2},$$

а операторы $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ аппроксимируются двухточечными разностными схемами

$$\frac{u(v_{k+1},v_l) - u(v_k,v_l)}{h} \text{ и } \frac{u(v_k,v_{l+1}) - u(v_k,v_l)}{h},$$

где $h = 1/N.$

В результате задача Дирихле (5), (6) аппроксимируется разностной схемой

$$a(v_k,v_l)\left(\frac{u(v_{k-1},v_l)+u(v_{k+1},v_l)-2u(v_k,v_l)}{h^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{u(v_k,v_{l+1})+u(v_k,v_{l-1})-2u(v_k,v_l)}{h^2}\right)+b(v_k,v_l)\frac{u(v_{k+1},v_l)-u(v_k,v_l)}{h}+c(v_k,v_l)\times$$

$$\times\frac{u(v_k,v_{l+1})-u(v_k,v_l)}{h}+d(v_k,v_l)u(v_k,v_l)-f(v_k,v_l)=0,\ \ k,l=1,2,\ldots,N-1. \quad (7)$$

Замечание. Из условия (6) следует, что

$$u(v_0,v_l)=u_0(v_0,v_l), u(v_N,v_l)=u_0(v_N,v_l),$$

$$u(v_k,v_0)=u_0(v_k,v_0), u(v_k,v_N)=u_0(v_k,v_N).$$

Представим систему уравнений (7) в виде

$$a(v_k,v_l)(u(v_{k+1},v_l)+u(v_{k-1},v_l)+u(v_k,v_{l+1})+u(v_k,v_{l-1})-4u(v_k,v_l))+$$

$$+hb(v_k,v_l)(u(v_{k+1},v_l)-u(v_k,v_l))+hc(v_k,v_l)(u(v_k,v_{l+1})-u(v_k,v_l))+$$

$$+h^2d(v_k,v_l)u(v_k,v_l)-h^2f(v_k,v_l)=0,\ \ k,l=1,2,\ldots,N-1. \quad (8)$$

Системе уравнений (8) поставим в соответствие систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du_{kl}(t)}{dt}=\alpha_{kl}(a(v_k,v_l)(u_{k+1,l}(t)+u_{k-1,l}(t)+u_{k,l+1}(t)+u_{k,l-1}(t)-4u_{k,l}(t))+$$

$$+hb(v_k,v_l)(u_{k+1,l}(t)-u_{kl}(t))+hc(v_k,v_l)(u(v_k,v_{l+1})-u(v_k,v_l))+$$

$$+h^2d(v_k,v_l)u(v_k,v_l)-h^2f(v_k,v_l)),\ \ k,l=1,2,\ldots,N-1. \quad (9)$$

Здесь α_{kl} – константы, выбор которых будет описан ниже, $u_{k,l}(t)=u(v_k,v_l,t)$.

Пусть система уравнений (8) однозначно разрешима. Обозначим через $u^*(v_k,v_l)$, $k,l=0,1,2,\ldots,N$, решение этой системы и введем обозначения $w_{kl}(t)=u_{kl}(t)-u^*_{kl}$, $u^*_{kl}=u(v_k,v_l)$, $k,l=0,1,2,\ldots,N$.

Тогда система уравнений (9) принимает вид

$$\frac{dw_{kl}(t)}{dt}=\alpha_{kl}(a(v_k,v_l)(w_{k+1,l}(t)+w_{k-1,l}(t)+w_{k,l+1}(t)+w_{k,l-1}(t)-4w_{k,l}(t))+$$

$$+hb(v_k,v_l)(w_{k+1,l}(t)-w_{kl}(t))+hc(v_k,v_l)(w(v_k,v_{l+1})-w(v_k,v_l))+$$

$$+h^2d(v_k,v_l)w_{k,l}(t)),\ \ k,l=1,2,\ldots,N-1. \quad (10)$$

Замечание. Очевидно, что

$$w_{0,l}(t) \equiv w_{N,l} \equiv w_{k,0}(t) \equiv w_{k,N}(t) \equiv 0, \ k = 0,1,...,N.$$

Теорема 4. Пусть существует функция $\alpha(t_1,t_2)$ такая, что

$$\alpha(t_1,t_2)a(t_1,t_2) \geq 0, \ \alpha(t_1,t_2)b(t_1,t_2) \geq 0,$$

$$\alpha(t_1,t_2)c(t_1,t_2) \geq 0, \ \alpha(t_1,t_2)d(t_1,t_2) < 0 \qquad (11)$$

при всех $t_1,t_2 \in D.$ Тогда система уравнений (10) устойчива в целом.

Доказательство. Представим систему уравнений (10) в операторной форме:

$$\frac{dw(t)}{dt} = Aw(t), \qquad (12)$$

где $w(t)$ – вектор функция,

$$w(t) = \{w_{11}(t),\dots,w_{1,N-1}(t),\dots,w_{N-1,N-1}(t);$$

матрица A строится очевидным образом.

Нетрудно видеть, что при выполнении перечисленных условий (11) логарифмическая норма матрицы A равна $\Lambda(A) = \max\limits_{1\leq k,l\leq N-1} h^2 d(v_k,v_l) < 0.$

Пусть функция $d(x_1,x_2) < 0$ в области $D.$ Следовательно $d(x_1,x_2) \leq -\beta < 0$ в этой области, тогда $\Lambda(A) < -\beta h^2.$

Из этого условия следует, что решение системы уравнений (12) при $t \to \infty$ абсолютно устойчиво при любых начальных условиях $w_{kl}(0),$ $k,l = 1,2,...,N-1,$ и при единственном ограничении:

$$w_{0,l}(0) = w_{N,l}(0) = w_{k,0}(0) = w_{k,N}(0) = 0, \ k,l = 0,1,...,N.$$

Таким образом, при указанном ограничении система уравнений (12) устойчива в целом. Отсюда следует, что система уравнений (9) устойчива в целом при любых начальных возмущениях, не нарушающих граничных значений.

Поэтому решение системы уравнений (9) сходится при $t \to \infty$ к решению $u^*(v_k,v_l),$ $k,l = 1,2,\dots,N-1,$ системы уравнений (7).

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 4 следует, что при $t \to \infty$ решение системы дифференциальных уравнений (9) стремится к решению системы алгебраических уравнений (7).

Решение нелинейных эллиптических уравнений на нейронных сетях Хопфилда

Рассмотрим в области $D = [0,1]^2$ систему нелинейных уравнений

$$a(x_1,x_2)g_1(\Delta u(x_1,x_2)) + b(x_1,x_2)g_2\left(\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right) +$$

$$+c(x_1,x_2)g_3\left(\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)+d(x_1,x_2)g_4(u(x_1,x_2))=f(x_1,x_2) \qquad (13)$$

с граничными условиями

$$u(x_1,x_2)|_\Gamma = u_0(x_1,x_2). \qquad (14)$$

Здесь $\Gamma = \partial D$; $g_i(x)$, $i=1,2,3,4$ – непрерывно-дифференцируемые функции на R_1.

По аналогии с линейным случаем введем сетку узлов (v_k,v_l), $k,l=0,1,\ldots,N$ и поставим граничной задаче (13), (14) в соответствие систему разностных уравнений:

$$a(v_k,v_l)g_1\left(\frac{u(v_{k-1},v_l)+u(v_{k+1},v_l)-2u(v_k,v_l)}{h^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{u(v_k,v_{l+1})+u(v_k,v_{l-1})-2u(v_k,v_l)}{h^2}\right)+$$

$$+b(v_k,v_l)g_2\left(\frac{u(v_{k+1},v_l)-u(v_k,v_l)}{h}\right)+c(v_k,v_l)g_3\left(\frac{u(v_k,v_{l+1})-u(v_k,v_l)}{h}\right)+$$

$$+d(v_k,v_l)g_4(u(v_k,v_l))=f(v_k,v_l),\ \ k,l=1,2,\ldots,N-1. \qquad (15)$$

Системе уравнений (15) поставим в соответствие систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_{kl}(t)}{dt}=\alpha_{kl}(a(v_k,v_l)g_1\left(\frac{u_{k-1,l}(t)+u_{k+1,l}(t)+u_{k,l+1}(t)+u_{k,l-1}(t)-4u_{kl}(t)}{h^2}\right)+$$

$$+b(v_k,v_l)g_2\left(\frac{u_{k+1,l}(t)-u_{k,l}(t)}{h}\right)+c(v_k,v_l)g_3\left(\frac{u_{k,l+1}(t)-u_{k,l}(t)}{h}\right)+$$

$$+d(v_k,v_l)g_4(u_{k,l}(t))-f(v_k,v_l)),\ \ k,l=1,2,\ldots,N-1. \qquad (16)$$

Здесь

$$u_{kl}(t)=u(v_k,v_l,t);\ \ k,l=0,1,\ldots,N;$$

$$u_{0l}(t)=u_0(0,v_l),\ \ l=0,1,\ldots,N,$$

$$u_{kN}(t)=u_0(v_k,1),\ \ k=0,1,\ldots,N,$$

$$u_{Nl}(t)=u_0(1,v_l),\ \ l=0,1,\ldots,N,$$

$$u_{k0}(t)=u_0(v_k,0),\ \ k=0,1,\ldots,N.$$

Предположим, что система уравнений (15) имеет решение $u^*(v_k,v_l)$, $k,l=0,1,\ldots,N$. Введем новую функцию $w(v_k,v_l,t)$, положив

$$u(v_k, v_l, t) = w(v_k, v_l, t) + u^*(v_k, v_l).$$

Тогда систему уравнений (16) можно представить в виде

$$\frac{dw_{kl}(t)}{dt} = \alpha_{kl}(a(v_k, v_l) g_1\left(\frac{w_{k+1,l}(t) + w_{k-1,l}(t) + w_{k,l+1}(t) + w_{k,l-1}(t) - 4w_{kl}(t)}{h^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{u^*_{k+1,l} + u^*_{k-1,l} + u^*_{k,l+1} + u^*_{k,l-1} - 4u^*_{kl}}{h^2}\right) -$$

$$-a(v_k, v_l) g_1\left(\frac{u^*_{k+1,l} + u^*_{k-1,l} + u^*_{k,l+1} + u^*_{k,l-1}(t) - 4u^*_{kl}}{h^2}\right) +$$

$$+b(v_k, v_l) g_2\left(\frac{w_{k+1,l}(t) - w_{k,l}(t)}{h} + \frac{u^*_{k+1,l} - u^*_{k,l}}{h}\right) - b(v_k, v_l) g_2\left(\frac{u^*_{k+1,l} - u^*_{k,l}}{h}\right) +$$

$$+c(v_k, v_l) g_3\left(\frac{w_{k,l+1}(t) - w_{k,l}(t)}{h} + \frac{u^*_{k,l+1} - u^*_{k,l}}{h}\right) - c(v_k, v_l) g_3\left(\frac{u^*_{k,l+1} - u^*_{k,l}}{h}\right) +$$

$$+d(v_k, v_l) g_4(w_{k,l}(t) + u^*_{k,l}) - d(v_k, v_l) g_4(u^*_{k,l})), \ k, l = 1, 2, \ldots, N-1. \quad (17)$$

В первом приближении система уравнений (17) имеет вид

$$\frac{dw_{kl}(t)}{dt} = \alpha_{kl}(a(v_k, v_l) g_1'\left(\frac{u^*_{k+1,l} + u^*_{k-1,l} + u^*_{k,l+1} + u^*_{k,l-1} - 4u^*_{kl}}{h^2}\right) \times$$

$$\times\left(\frac{w_{k+1,l}(t) + w_{k-1,l}(t) + w_{k,l+1}(t) + w_{k,l-1}(t) - 4w_{kl}(t)}{h^2}\right) +$$

$$+b(v_k, v_l) g_2'\left(\frac{u^*_{k+1,l} - u^*_{k,l}}{h}\right)\frac{w_{k+1,l}(t) - w_{k,l}(t)}{h} +$$

$$+c(v_k, v_l) g_3'\left(\frac{u^*_{k,l+1} - u^*_{k,l}}{h}\right)\frac{w_{k,l+1}(t) - w_{k,l}(t)}{h} +$$

$$+d(v_k, v_l) g_4'(u^*_{k,l}) w_{k,l}(t)), \ k, l = 1, 2, \ldots, N-1. \quad (18)$$

Исследуем устойчивость решения системы уравнений (18).

Теорема 5. Пусть $D = [0,1]^2$. Пусть $\alpha(x_1, x_2)$ – функция, определенная на D, $\alpha(x_1, x_2) \neq 0$ при $(x_1, x_2) \in D$, и такая, что при любых $(x_1, x_2) \in D$, и любом натуральном N, $N \geq 2$, выполняются условия:

$$1)\ \alpha(x_1,x_2)a(x_1,x_2)g_1'\left(\frac{\overset{*}{u}_{k+1,l}+\overset{*}{u}_{k-1,l}+\overset{*}{u}_{k,l+1}+\overset{*}{u}_{k,l-1}-4\overset{*}{u}_{kl}}{h^2}\right)\ge 0;$$

$$2)\ \alpha(x_1,x_2)b(x_1,x_2)g_2'\left(\frac{\overset{*}{u}_{k+1,l}-\overset{*}{u}_{k,l}}{h}\right)\ge 0;$$

$$3)\ \alpha(x_1,x_2)c(x_1,x_2)g_3'\left(\frac{\overset{*}{u}_{k,l+1}-\overset{*}{u}_{k,l}}{h}\right)\ge 0;$$

$$4)\ \alpha(x_1,x_2)d(x_1,x_2)g_4'(\overset{*}{u}_{k,l})\le -\beta<0$$

при $1\le k,l\le N-1$.

Тогда решение системы уравнений (18) устойчиво в целом.

Доказательство. Представим систему уравнений (18) в операторной форме:

$$\frac{dw_{kl}(t)}{dt}=Bw(t), \tag{19}$$

где

$$w(t)=\{w_{11}(t),\ldots,w_{1,N-1}(t),w_{2,1}(t),\ldots,w_{2,N-1}(t),\ldots,w_{N-1,1}(t),\ldots,w_{N-1,N-1}(t)\};$$

построение матрицы B очевидно.

Нетрудно видеть, что при выполнении условий теоремы логарифмическая норма матрицы B отрицательна. Тогда из неравенства Винтнера (см. [6; 8, с. 51] следует устойчивость в целом системы уравнений (18).

Теорема доказана.

Устойчивость в целом решения системы уравнений (18) дает основание полагать, что решение системы уравнений (16) будет устойчиво относительно вектора $\overset{*}{u}_{kl}$, $k,l=1,2,\ldots,N-1$. Для строгого доказательства устойчивости решения системы уравнений (16) относительно вектора $\overset{*}{u}_{kl}$, $k,l=1,2,\ldots,N-1$, нужно использовать критерии, предложенные в работах [7, 8]. В применении к системе уравнений (16) эти критерии оказываются трудно обозримыми. Поэтому при решении нелинейных эллиптических уравнений на нейронных сетях Хопфилда достаточно ограничиться критериями теоремы 5. Выполнение этих критериев дает достаточные основания для проведения вычислений.

Эффективность предложенного метода проиллюстрирована на следующих примерах.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $\Delta u = 0$ в области $D=[0,1]^2$ с граничными условиями $u_0(x, y)$:

прямая $AB = \{y = 0,\ 0 \le x \le 1\}$ $u_{AB} = x$;

прямая $AD = \{x = 0,\ 0 \le y \le 1\}$ $u_{AD} = 0$;

прямая $CD = \{y = 1,\ 0 \le x \le 1\}$ $u_{CD} = x$;

прямая $BC = \{x = 1,\ 0 \le y \le 1\}$ $u_{BC} = 1$.

Точное решение $u(x, y) \equiv x$.

Задача Дирихле была приведена к системе уравнений (9), которая решалась методом Эйлера.

Результаты решения задачи Дирихле приведены на рис. 2–5. Здесь m – число итераций метода Эйлера; N – число узлов разностной схемы по одной переменной; h – шаг метода Эйлера.

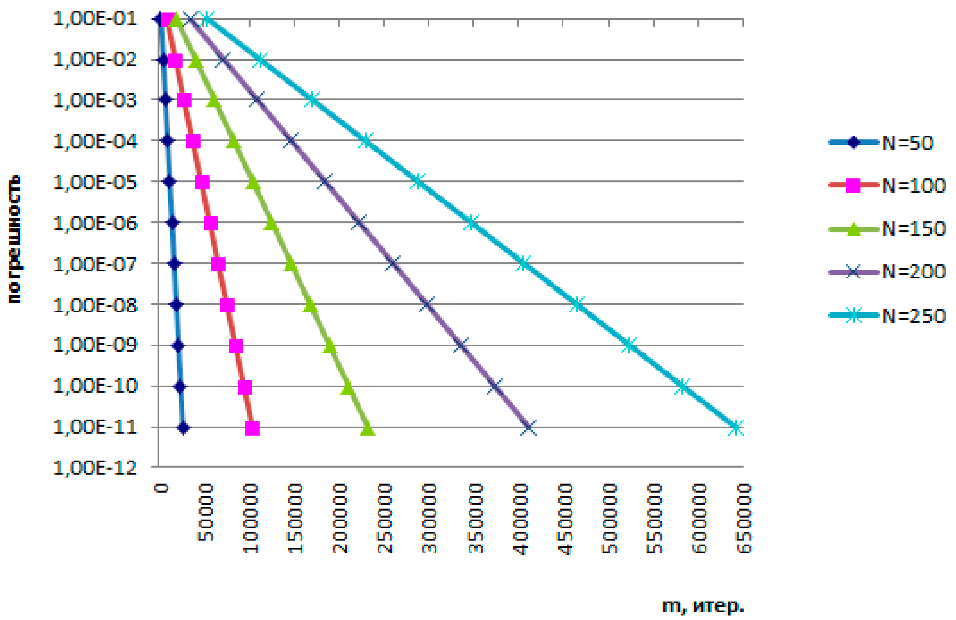

Рис. 2. Результаты решения задачи с шагом в методе Эйлера $h = 0,1$

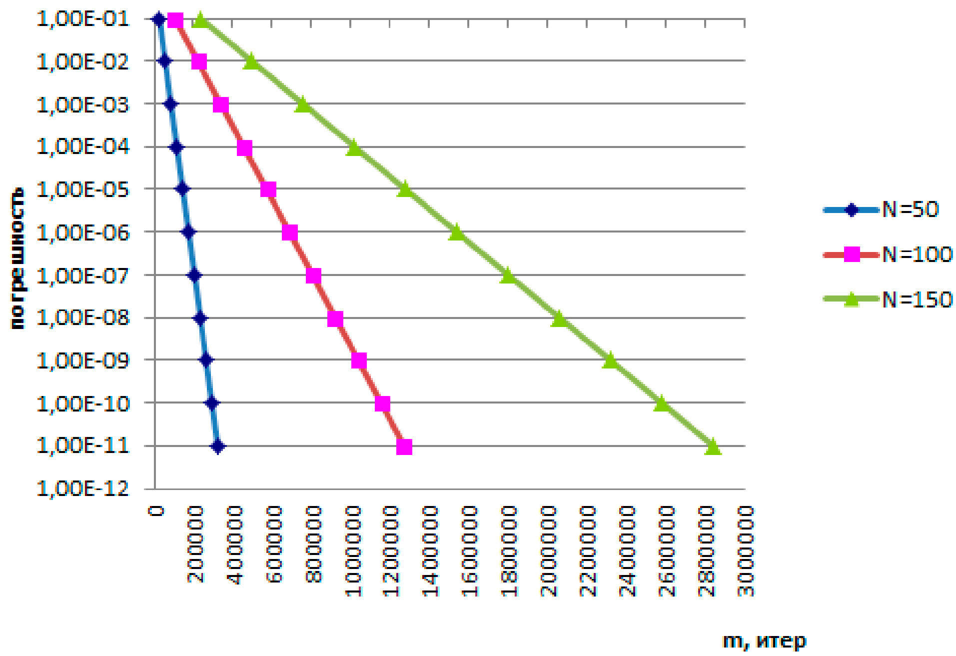

Рис. 3. Результаты решения задачи с шагом в методе Эйлера $h = 0,01$

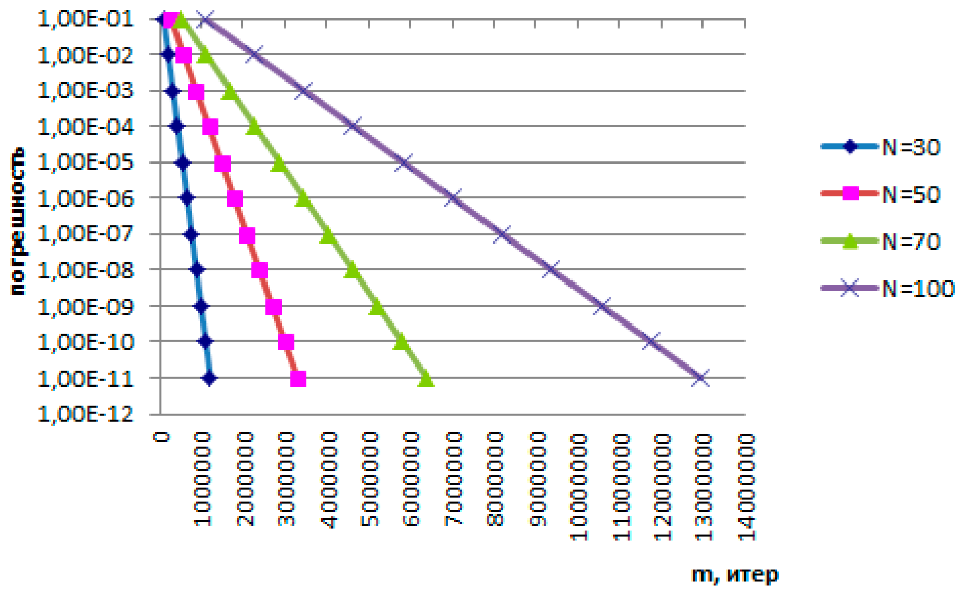

Рис. 4. Результаты решения задачи с шагом в методе Эйлера $h = 0{,}001$

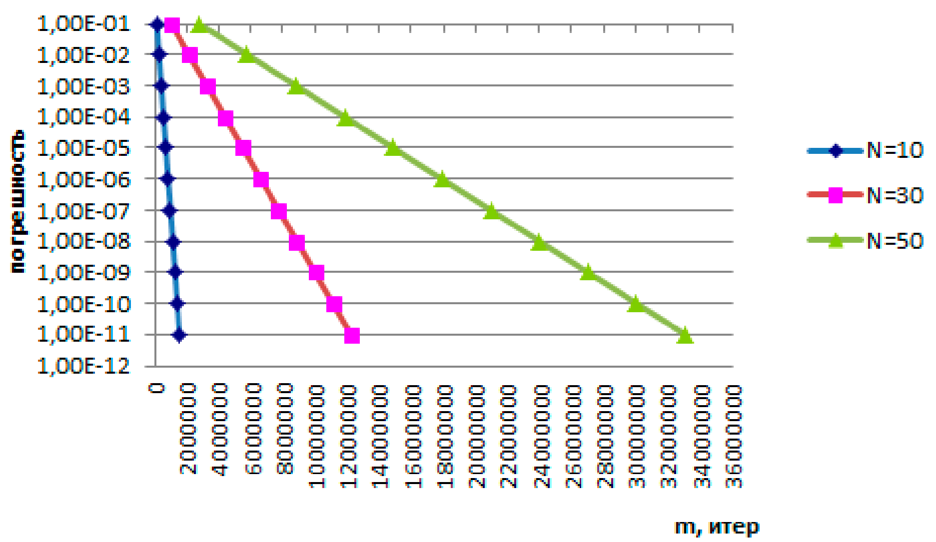

Рис. 5. Результаты решения задачи с шагом в методе Эйлера $h = 0{,}0001$

Пример 2. Рассмотрим уравнение $\Delta w - w = 0$ в области $D = [0,1]^2$ при граничных условиях $w_0(x, y)$:

прямая $AB = \{y = 0,\ 0 \le x \le 1\}$ $w_{AB} = x + 1$;

прямая $AD = \{x = 0,\ 0 \le y \le 1\}$ $w_{AD} = \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y$;

прямая $CD = \{y = 1,\ 0 \le x \le 1\}$ $w_{CD} = (x + 1)(\operatorname{ch}(1) + \operatorname{sh}(1))$;

прямая $BC = \{x = 1,\ 0 \le y \le 1\}$ $w_{BC} = 2(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)$;

Точное решение – $w(x, y) \equiv (x + 1)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)$.

Краевая задача была приведена к системе уравнений (9), которая решалась методом Эйлера.

Результаты решения уравнения приведены на рис. 6–8. Здесь m – число итераций метода Эйлера; N – число узлов разностной схемы по одной переменной; h – шаг метода Эйлера.

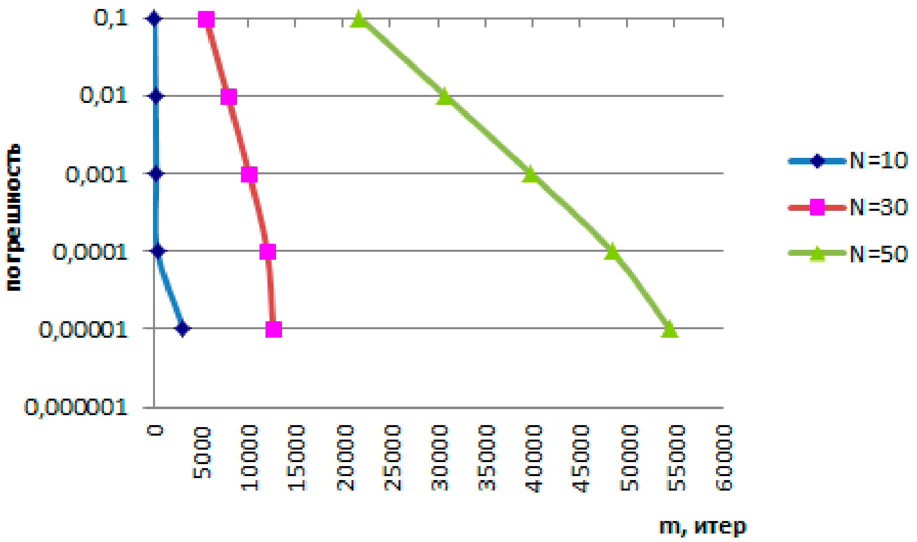

Рис. 6. Результаты решения задачи с шагом в методе Эйлера $h = 0{,}1$

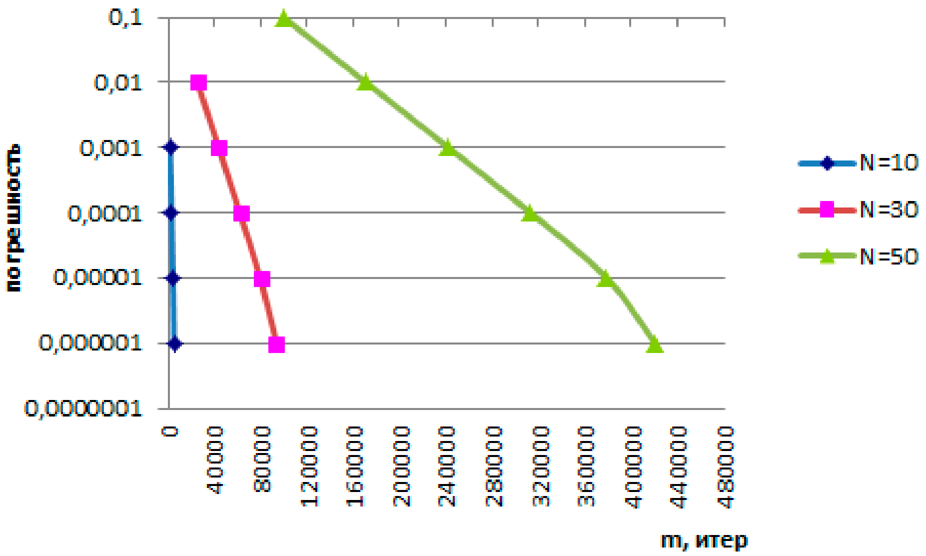

Рис. 7. Результаты решения задачи с шагом в методе Эйлера $h = 0{,}01$

Заключение

Предложен метод решения краевых задач для линейных и нелинейных эллиптических уравнений, основанный на методах теории устойчивости. Эффективность метода проиллюстрирована модельными примерами.

Результаты работы могут быть использованы при решении широкого класса краевых задач для линейных и нелинейных эллиптических уравнений, определенных в кусочно-гладких областях.

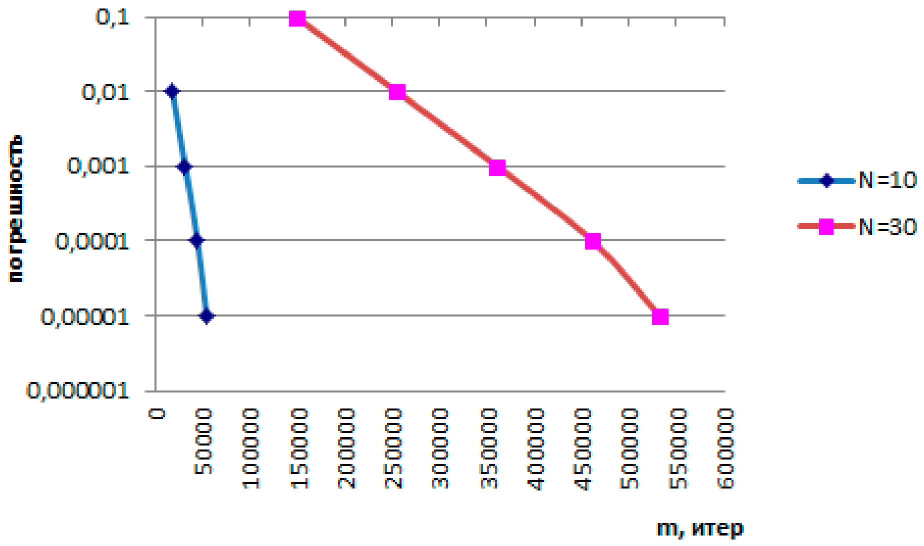

Рис. 8. Результаты решения задачи с шагом в методе Эйлера h = 0,001

Список литературы

1. **Hopfield, J. J.** Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities / J. J. Hopfield // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1982, April. – Vol. 79. – P. 2554–2558.
2. **Hopfield, J. J.** Neurons with Graded Response have Collective Computational Properties like those of Two–State Neurons / . J. Hopfield // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1984, May. – Vol. 81. – P. 3088–3092.
3. **Горбаченко, В. И.** Нейрокомпьютеры в решении краевых задач теории поля / В. И. Горбаченко. – М. : Радиотехника, 2003. – 336 с.
4. **Бойков, И. В.** Приближенное решение задач математической физики на нейронных сетях Хопфилда / И. В. Бойков, В. А. Руднев, А. И. Бойкова // Нейрокомпьютеры, разработка, применение. – 2013. – № 10. – С. 13–22.
5. **Бойков, И. В.** Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда / И. В. Бойков, О. А. Баулина // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 1. – С. 41–51.
6. **Далецкий, Ю. Л.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 534 с.
7. **Бойков, И. В.** Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений / И. В. Бойков // ДАН СССР. – 1990. – Т. 314, № 6. – С. 1298–1300.
8. **Бойков, И. В.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2008. – 244 с.
9. **Бойков, И. В.** Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.
10. **Гюнтер, Н. М.** Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 415 с.

References

1. Hopfield J. J. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1982, April, vol. 79, pp. 2554–2558.
2. Hopfield J. J. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1984, May, vol. 81, pp. 3088–3092.

3. Gorbachenko V. I. *Neyrokomp'yutery v reshenii kraevykh zadach teorii polya* [Neurocomputers in solution of boundary problems of the field theory]. Moscow: Radiotekhnika, 2003, 336 p.
4. Boykov I. V., Rudnev V. A., Boykova A. I. *Neyrokomp'yutery, razrabotka, primenenie* [Neurocomputers, development, application]. 2013, no. 10, pp. 13–22.
5. Boykov I. V., Baulina O. A. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Journal of Middle Volga mathematical society]. 2013, vol. 15, no. 1, pp. 41–51.
6. Daletskiy Yu. L., Kreyn M. G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of differential equations solution in Banach space]. Moscow: Nauka, 1970, 534 p.
7. Boykov I. V. *DAN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences]. 1990, vol. 314, no. 6, pp. 1298–1300.
8. Boykov I. V. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy* [Stability of differential equations solutions]. Penza: Izd-vo PGU, 2008, 244 p.
9. Boykov I. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1308–1314.
10. Gyunter N. M. *Teoriya potentsiala i ee primenenie k osnovnym zadacham matematicheskoy fiziki* [Theory of potentials and application thereof to main problems of mathematical physics]. Moscow: GITTL, 1953, 415 p.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Boykov Il'ya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: math@pnzgu.ru

Баулина Ольга Александровна
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Baulina Ol'ga Aleksandrovna
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: math@pnzgu.ru

УДК 004.02

Бойков, И. В.

Приближенное решение эллиптических уравнений на нейронных сетях Хопфилда / И. В. Бойков, О. А. Баулина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 1 (29). – С. 39–53.